ECOLE DE L'AIR

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

Notations :

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ *désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur* $[0,1]$.

E *désigne dans ce problème l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$, *de classe* C^1 *par morceaux sur* $[0,1]$, *et telles que* $f(0)=f(1)=0$.

l^2 *désigne l'ensemble des suites* $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de réels telles que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ *soit convergente.*

On pose, $\forall u\in l^2$, $N_2(u)=\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

PRELIMINAIRE

1. Démontrer que l^2 est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

2. Démontrer que N_2 est une norme sur l^2.

3. Démontrer que pour tout couple $(\alpha,\beta)\in l^2\times l^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n\beta_n|\le\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

PARTIE I

On considère dans cette partie la somme f *de la série de fonctions*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n^2}$$

1. Démontrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et périodique (préciser la période).

$$\text{On pose } S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\pi x)$$

2. Soit $x\in]0,1]$. Démontrer que la suite $S_n(x)$ est bornée et préciser un majorant $A(x)$ de $|S_n(x)|$.

3. Démontrer l'inégalité :

$$\forall n\ge 1,\ \forall p\ge 0,\ \left|\sum_{k=n}^{n+p-1}\frac{S_k(x)}{k(k+1)}\right|\le A(x)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\right)$$

En déduire l'inégalité :

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\cos(k\pi x)}{k}\right| \le \frac{2A(x)}{n}$$

4. f est-elle de classe C^1 sur $]0,1]$? On exprimera la dérivée sous forme d'une série.

5. Déterminer une constante B indépendante de x, telle que, pour tout réel $x \in \left]0,\frac{1}{2\pi}\right]$:

$$\sum_{k=1}^{E\left(\frac{1}{\pi x}\right)-1}\frac{\cos(k\pi x)}{k} \ge B.\ln\left(E\left(\frac{1}{\pi x}\right)\right)$$

($E(x)$ désigne l'unique entier naturel vérifiant $E(x) \le x < E(x)+1$).

6. Montrer, à l'aide de 3°, que la fonction $g(x) = \sum_{k=E\left(\frac{1}{\pi x}\right)}^{+\infty}\frac{\cos(k\pi x)}{k}$ est bornée sur $\left]0,\frac{1}{2\pi}\right]$.

7. f appartient-elle à E ?

PARTIE II

On considère dans cette partie la fonction $f \in E$ définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = x(1-x).$$

1. Déterminer une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}\sin(n\pi x)$.

2. Démontrer que $a \in l^2$ et déterminer $N_2(a)$. On pourra à cet effet considérer la fonction f'.

PARTIE III

On définit sur $E \times E$ l'application $(f,g) \to (f|g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.

(On remarquera que f et g étant de classe C^1 par morceaux, cette définition a un sens, bien que f et g ne soient pas nécessairement dérivables partout.)

On pose pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier $n \ge 1$:

$$u_n(x) = \sin(n\pi x)$$

1. *Structure Euclidienne sur E.*

1.a. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On notera $\|f\|$ la norme euclidienne associée.

1.b. Montrer que la famille $(u_n)_{n\ge1}$ définit un système orthogonal sur E. Préciser en particulier $\|u_n\|$.

2. *Soit* $b \in]0,1[$.

2.a. Montrer que toute fonction de E s'annulant en b est orthogonale à la fonction θ_b où θ_b est l'application affine telle que :

$$\forall x \in [0,b],\ \theta_b(x) = \frac{1}{b}x,\ \forall x \in [b,1],\ \theta_b(x) = \frac{1}{1-b}(1-x)$$

2.b. Déduire de la question précédente que pour toute fonction f de E,

$$|f(b)| \leq \sqrt{b(1-b)}\|f\|$$

On pourra considérer une combinaison linéaire de f et θ_b.

3. Montrer que toute suite de fonctions de E convergente dans E pour la norme euclidienne est uniformément convergente.

On pourra comparer $\|f\|$ et $N_\infty(f) = \sup(|f(t)|,\ t \in [0,1])$.

4. *Soit* $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *un élément de* $l^2(\mathbb{R})$. *On considère la série de fonctions*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} u_n(x).$$

Démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} u_n(x)$ converge sur $[0,1]$. On notera $s_a(x)$ sa somme.

Pourquoi peut-on affirmer que s_a est continue sur $[0,1]$?

On définit ainsi $s : a \to s_a$, *application linéaire de* $l^2(\mathbb{R})$ *dans* $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

5. *Etude de l'application* s.

5.a. Montrer qu'il existe un réel $K > 0$, tel que pour tout $a \in l^2(\mathbb{R})$

$$N_\infty(s_a) \leq K.N_2(a)$$

Que peut-on en déduire pour l'application s ?

5.b. Calculer $\int_0^1 s_a(x)u_n(x)dx$. En déduire que l'application s est injective.

6. *On se propose ici de prouver que* $E \subseteq \mathrm{Im}(s)$.

Soit $f \in E$. *On considère la fonction impaire sur* $[-1,1]$, *périodique de période 2 et dont la restriction à* $[0,1]$ *coïncide avec* f, *que l'on notera* $\tilde{f}$.

6.a. Préciser sous forme intégrale les coefficients du développement en série de Fourier de $(\tilde{f})'$, puis ceux de $\tilde{f}$.

6.b. En appliquant la relation de Parseval à $(\tilde{f})'$, montrer que $f \in \mathrm{Im}(s)$.

7. Démontrer que $E \neq \mathrm{Im}(s)$.

8. *Soit* $f \in E$. *On pose* $N(f) = N_2(a)$ *où* a *désigne l'antécédent de* f *par* s.

8.a. Montrer que N définit une norme sur E.

8.b. Démontrer que N et $\|.\|$ sont proportionnelles

($\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur E introduite au III.1°)